Capítulo 3

Conexión

3.1. Espacios conexos

Definición 3.1.1. Sea X un espacio topológico. Una *separación* $(U | V)$ de X es un par de abiertos U y V de X tales que

$$U \cup V = X \quad \text{y} \\ U \cap V = \emptyset.$$

Diremos que X es *conexo* si solamente admite la *separación trivial* $(X | \emptyset)$.

Observación 3.1.2. Sea X es un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Entonces A no será conexo si existen U y V abiertos de X con $U \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A \neq \emptyset$ tales que

$$A \subset U \cup V \quad \text{y} \\ (U \cap V) \cap A = \emptyset.$$

Proposición 3.1.3. Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:

- (1) X es conexo.
- (2) X no se puede escribir como unión disjunta de dos cerrados disjuntos no vacíos.
- (3) Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Razonando por reducción al absurdo, supongamos que X es conexo y existen cerrados no vacíos F_1 y F_2 tales que

$$X = F_1 \cup F_2 \quad \text{y} \\ F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Entonces $X \setminus F_1$ y $X \setminus F_2$ son abiertos no vacíos tales que

$$(X \setminus F_1) \cup (X \setminus F_2) = X \setminus \underbrace{(F_1 \cap F_2)}_{\emptyset} = X \quad \text{y}$$

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus \underbrace{F_1 \cup F_2}_X = \emptyset.$$

Como consecuencia, $(X \setminus F_1 \mid X \setminus F_2)$ es una separación no trivial de X lo que entra en contradicción con la conexión de X .

(2) $\Rightarrow$ (1) Razonando del mismo modo, si X no es conexo admite una separación no trivial $(U \mid V)$. Entonces X se puede escribir como unión disjunta de los cerrados no vacíos $X \setminus U$ y $X \setminus V$.

(1) $\Rightarrow$ (3)

Supongamos que existe un subconjunto propio U de X no vacío que es abierto y cerrado. Entonces, $(U \mid X \setminus U)$ es una separación no trivial de X , lo que contradice la conexión de X .

(3) $\Rightarrow$ (1)

Supongamos que X no es conexo y sea $(U \mid V)$ una separación no trivial. Entonces $U = X \setminus V \neq \emptyset$ es abierto cerrado en contradicción con la hipótesis. $\square$

Ejemplos

1. Sea X un espacio discreto con más de un elemento. Entonces X no es conexo ya que dado $x \in X$, $(\{x\} \mid X \setminus \{x\})$ es una separación no trivial de X .
2. Si X es un espacio indiscreto entonces X es conexo ya que los únicos abiertos son X y $\emptyset$.
3. El espacio de Sierpinski es conexo ya que el único abierto no trivial es $\{0\}$.
4. La recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ no es conexo ya que $(U \mid V)$ con

$$U = (-\infty, 0) \quad \text{y} \quad V = [0, +\infty),$$

es una separación no trivial de $\mathbb{R}_S$.

5. La recta de Kolmogoroff $\mathbb{R}_K$ es conexo ya que si U y V son abiertos no vacíos de $\mathbb{R}_K$ entonces $U \cap V \neq \emptyset$.
6. El conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dotado de la topología usual no es conexo ya que $(U \mid V)$ con

$$U = (-\infty, 0) \quad \text{y} \quad V = (0, +\infty),$$

es una separación no trivial de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales dotado de la topología usual no es conexo. En particular, si $A \subset \mathbb{Q}$ es un subconjunto que contiene más de un punto entonces A no es conexo.

En efecto, sean $p, q \in A$ dos puntos tales que $p < q$. Como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$ y, por tanto, $(U \mid V)$ con

$$U = (-\infty, r) \cap A \quad \text{y} \quad V = (r, +\infty) \cap A$$

es una descomposición no trivial de A .

Proposición 3.1.4. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales dotado de la topología usual es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}$ con la topología usual no es conexo. Entonces, existe $(U \mid V)$ separación no trivial de $\mathbb{R}$. Sean $u \in U$ y $v \in V$ y supongamos que $u < v$. Se define

$$A := \{u' \in U \mid (u, u') \subset U\}.$$

Como U es abierto en $\mathbb{R}$ se sigue que $A \neq \emptyset$. Además, A está acotado superiormente por v y, por consiguiente existe $a = \sup A$.

Supongamos que $a \in U$. Como U es abierto en $\mathbb{R}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$. Como a es el supremo de A existe $u' \in A$ tal que $a - \varepsilon < u' \leq a$. Como consecuencia

$$(u, a + \varepsilon) = (u, u') \cup (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$$

lo que contradice que a sea el supremo de A . Entonces, $a \in V$ y, como V es abierto, existe $\varepsilon' > 0$ tal que $(a - \varepsilon', a + \varepsilon') \subset V$ y, por tanto

$$(a - \varepsilon', a + \varepsilon') \cap U = \emptyset,$$

lo que contradice que a sea el supremo de A .

Como consecuencia de estas contradicciones se sigue que $\mathbb{R}$ es conexo ya que solamente admite la separación trivial. $\square$

3.2. Continuidad y conexión

Teorema 3.2.1. *Sean X e Y espacios topológico y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Si X es conexo entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $f(X)$ no es conexo y sean U y V abiertos de Y con $U \cap f(X) \neq \emptyset$ y $V \cap f(X) \neq \emptyset$ y tales que

$$\begin{aligned} f(X) &\subset U \cup V, \\ (U \cap V) \cap f(X) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Veamos que $(f^{-1}(U) \mid f^{-1}(V))$ es una separación no trivial de X . Como U y V son abiertos de Y y f se tiene que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos. Por otro lado, dado que $U \cap f(X) \neq \emptyset$ y $V \cap f(X) \neq \emptyset$ se tiene que tanto $f^{-1}(U)$ como $f^{-1}(V)$ son no vacíos. Además, como $f(X) \subset U \cup V$ se tiene que

$$X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$

y dado que $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ se sigue que

$$\emptyset = f^{-1}(U \cap V \cap f(X)) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Como consecuencia, $(f^{-1}(U) \mid f^{-1}(V))$ es una separación no trivial de X , lo que contradice la conexión de X . $\square$

Corolario 3.2.2. *Todo cociente de un espacio topológico conexo es conexo.*

Corolario 3.2.3. *La conexión es una propiedad topológica.*

Ejemplos

1. Todo intervalo abierto de la recta real es homeomorfo a la recta real y, por tanto, conexo.
2. La circunferencia S^1 es conexo ya que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

es continua y sobreyectiva.

Proposición 3.2.4. *La circunferencia y la recta real no son homeomorfos.*

Demostración. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que existe un homeomorfismo $h : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $x_0 = h(P_N)$ donde $P_N = (0, 1)$ es el polo norte de S^1 . Entonces

$$h|_{S^1 \setminus \{P_N\}} : S^1 \setminus \{P_N\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$$

es un homeomorfismo entre $S^1 \setminus \{P_N\}$ que es conexo siendo homeomorfo a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ que no lo es ya que admite la separación no trivial $(U \mid V)$ con $U = (-\infty, x_0)$ y $V = (x_0, +\infty)$. Esto contradice que la conexión sea una propiedad topológica y por tanto se sigue el resultado. $\square$

3.3. Algunas propiedades de los espacios conexos

Lemma 3.3.1. *Sea X un espacio topológico y $(U | V)$ una separación no trivial de X . Supongamos que $A \subset X$ es conexo. Entonces, $A \subset U$ o $A \subset V$.*

Demostración. Se deja como ejercicio al lector. □

Una consecuencia inmediata de este lema es el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2. *Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$ son subconjuntos conexos tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces, $A \cup B$ es conexo.*

Proposición 3.3.3. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto conexo. Supongamos que B satisface que $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces B es conexo. En particular la adherencia de un conjunto conexo es un conjunto conexo.*

Demostración. Supongamos que B no es conexo y sea $(U | V)$ una separación no trivial de B , es decir, U y V son abiertos disjuntos no vacíos de B con la topología de subespacio, tales que $U \cup V = B$. Como $A \subset B$ es conexo, se tiene que $A \subset U$ o $A \subset V$. Supongamos que $A \subset U$ y sea V' abierto en X tal que $V = V' \cap B$. Sea $x \in V$, entonces V' es un entorno abierto de x y, por tanto, como $B \subset \overline{A}$,

$$\emptyset \neq V' \cap A = V \cap A$$

lo que contradice que $(U | V)$ sea una separación no trivial de B . □

Corolario 3.3.4. *Todo intervalo de la recta real es un conjunto conexo.*

Ejemplos

1. El recíproco de la Proposición 3.3.3 no es cierto ya que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es conexo mientras que su adherencia es la recta real $\mathbb{R}$ que sí es conexo.
2. El *seno del topólogo* definido como

$$S = \{(x, \sin 1/x) \mid x \in (0, 1]\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

es conexo.

En efecto, sea

$$\begin{aligned} f : (0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, \sin 1/x). \end{aligned}$$

La aplicación f es continua y, como consecuencia,

$$S_0 = \{(x, \sin 1/x) \mid x \in (0, 1]\} = f((0, 1])$$

es conexo. La conexión de S se sigue de la conexión de S_0 combinado con que $S = \overline{S_0}$.

Proposición 3.3.5. *Sea X un espacio topológico. X es conexo si y solo si dados $x, y \in X$ existe un conexo $C \subset X$ tales que $x, y \in C$.*

Demostración. “ $\Rightarrow$ ” Si X es conexo basta tomar $C = X$.

“ $\Leftarrow$ ” Supongamos, razonando por reducción al absurdo que X no es conexo y sea $(U \mid V)$ una separación no trivial de X . Si $C \subset X$ es conexo se tiene que $C \subset U$ o $C \subset V$ y, por tanto, si escogemos $x \in U$ e $y \in V$ no existe ningún conexo que contenga simultáneamente a x e y en contradicción con la hipótesis. □

Teorema 3.3.6. *Sean X e Y espacios topológicos. El espacio producto $X \times Y$ es conexo si y solo si X e Y son conexos.*

Demostración. “ $\Rightarrow$ ” Puesto que las proyecciones π_1 y π_2 en cada uno de los factores son continuas y sobreyectivas si $X \times Y$ es conexo se sigue que X e Y también lo son.

“ $\Leftarrow$ ” Veamos que dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en $X \times Y$ existe un conexo C tal que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$. Basta escoger

$$C = (\{x_1\} \times Y) \cup (X \times \{y_2\}).$$

En efecto, C es conexo ya que es la unión de $\{x_1\} \times Y$ y $X \times \{y_2\}$ que son conexos siendo homeomorfos a X e Y respectivamente y

$$(\{x_1\} \times Y) \cap (X \times \{y_2\}) = \{(x_1, y_2)\}.$$

Además $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$. Por tanto $X \times Y$ es conexo. □

Corolario 3.3.7. *$[0, 1] \times [0, 1]$ es conexo y, como consecuencia, lo son todos sus cocientes.*

3.4. Componentes conexas

Sea X un espacio topológico. Se define en X la relación $x \sim y$ si existe $C \subset X$ conexo tal que $x, y \in C$.

Observación 3.4.1. La relación $\sim$ es de equivalencia.

Definición 3.4.2. Las clases de equivalencia de $\sim$ se denominan *componentes conexas* de X . La componente conexa que contiene a un punto $x \in X$ se denota por $C(x)$.

Teorema 3.4.3. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. La componente conexa $C(x)$ es el mayor subconjunto conexo de X que contiene a x . Además, X es la unión disjunta de sus componentes conexas.

Demostración. Sea $x \in X$ y $C(x)$ la componente conexa de X que contiene a x . Es claro que si $E \subset X$ es conexo y $x \in E$ entonces $E \subset C(x)$ ya que todo punto $y \in E$ está relacionado con x . Por otro lado, $C(x)$ es conexo ya que si $y, z \in C(x)$ existen A y B subconjuntos conexos de X tales que $x, y \in A$ y $x, z \in B$. Por tanto, $A, B \subset C(x)$. Como $x \in A \cap B$ se tiene que $A \cup B \subset C(x)$ es un subconjunto conexo tal que $y, z \in A \cup B$. Además, si A es conexo con $x \in A$ se tiene que para cada $y \in A$, $y \sim x$ y, como consecuencia, $A \subset C(x)$.

La segunda parte del enunciado se sigue de que $\sim$ es una relación de equivalencia. □

Proposición 3.4.4. Sea X un espacio topológico. Las componentes conexas de X son subconjuntos cerrados de X .

Demostración. En efecto, sea $x \in X$. Como $C(x)$ es conexo se tiene que $\overline{C(x)}$ es conexo. Además $x \in \overline{C(x)}$ y, por tanto, se sigue $\overline{C(x)} \subset C(x)$, lo que garantiza que $C(x)$ es cerrado. □

Ejemplos

1. Las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ con la topología son los puntos.
2. Las componentes conexas de $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual son los puntos.
3. Las componentes conexas de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la topología usual son $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

3.5. Conexión por caminos

Definición 3.5.1. Sea X un espacio topológico. Llamaremos *camino* en X a una aplicación continua $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$. Diremos que X es conexo por caminos si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un camino σ en X tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.

Ejemplos

1. $\mathbb{R}^n$ es conexo por caminos ya que dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \sigma(t) = (1-t)x + ty \end{aligned}$$

es un camino que une x e y . Asimismo, cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo por caminos.

2. Si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo por caminos.
 3. El espacio de Sierpinski es conexo por caminos ya que la aplicación $\sigma : [0, 1] \longrightarrow S$ dada por

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

es un camino entre 0 y 1.

4. Más generalmente, si X un conjunto finito preordenado y sean $x, y \in X$ dos elementos tales que $x \leq y$ la aplicación $\sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ dada por

$$\sigma(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, 1) \\ y & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

es un camino entre x e y .

5. El seno del topólogo $S = \{(x, \sin 1/x) \mid x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$ no es conexo por caminos.

Proposición 3.5.2. *Sea X un espacio topológico. Si X es conexo por caminos entonces es conexo.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 3.5.3. *Sean X e Y espacios topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si X es conexo por caminos, entonces $f(X)$ es conexo por caminos.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in f(X)$ y $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como X es conexo por caminos existe un camino σ en X con $\sigma(0) = x_1$ y $\sigma(1) = x_2$. Entonces, $\bar{\sigma} = f \circ \sigma$ es un camino e Y tal que $\bar{\sigma}(0) = y_1$ e $\bar{\sigma}(1) = y_2$. □

Corolario 3.5.4. *La conexión por caminos es una propiedad topológica.*

Corolario 3.5.5. *Cualquier cociente de un espacio conexo por caminos es conexo por caminos.*

Teorema 3.5.6. *Sean X e Y espacios topológicos. El espacio producto $X \times Y$ es conexo por caminos si y solo si X e Y son conexos por caminos.*

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplos

1. La esfera S^n con $n \geq 1$ es conexo por caminos ya que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es conexo por caminos y la aplicación

$$r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$$

$$x \mapsto r(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

es continua y sobreyectiva.

2. El cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ es conexo por caminos y, por tanto, lo son todos sus cocientes.

3.6. Componentes conexas por caminos

Sea X un espacio topológico. Consideremos en X la relación $\sim$ dada por

$$x \sim y \quad \text{si existe un camino } \sigma \text{ en } X \text{ con } \sigma(0) = x \text{ y } \sigma(1) = y.$$

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición 3.6.1. Las clases de equivalencia de la relación $\sim$ se denominan *componentes conexas por caminos* de X . La componente conexa por caminos que contiene a un punto $x \in X$ se denota por $c(x)$.

Teorema 3.6.2. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. La componente conexa por caminos $c(x)$ es el mayor subconjunto conexo por caminos que contiene a x . Además, X es la unión disjunta de sus componentes conexas por caminos.*

Demostración. Ejercicio. Pista: La prueba es análoga a la de las componentes conexas. □

Ejemplos

1. El seno del topólogo

$$S = \overline{\{(x, \sin 1/x) \mid x \in (0, 1]\}}$$

tiene dos componentes conexas por caminos

$$c_0 = \{0\} \times [-1, 1] \quad \text{y} \quad c_1 = \{(x, \sin 1/x) \mid x \in [0, 1)\}.$$

3.7. Conexión local

Definición 3.7.1. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *localmente conexo* (*localmente conexo por caminos*) si para cada $x \in X$ y cada entorno N de x existe un entorno conexo (conexo por caminos) N' de x tal que $N' \subset N$.

Ejemplos

1. Sea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la topología usual. Sabemos que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es conexo y, por tanto, no es conexo por caminos. Sin embargo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es localmente conexo y localmente por caminos.

En efecto, sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y N un entorno de x , entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N' = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset N$. Dado que N' es un entorno conexo y conexo por caminos de x se sigue el resultado.

2. El conjunto de los números racionales con la topología usual no es localmente conexo por caminos ni localmente conexo.

En efecto, si $x \in \mathbb{Q}$ y $N \in \mathcal{N}_x$, entonces N contiene más de un punto y, por tanto, N no es conexo.

3. El seno del topólogo es conexo, no es conexo por caminos y tampoco es localmente conexo por caminos ni localmente conexo.
4. El conjunto de los números racionales dotado de la topología usual no es localmente conexo por caminos ni localmente conexo.
5. El *espacio peine*

$$P = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$$

con la topología usual es conexo y conexo por caminos pero no es localmente conexo por caminos ni localmente conexo.

Teorema 3.7.2. *Sea X un espacio topológico. Si X es conexo y localmente conexo por caminos, entonces X es conexo por caminos.*

Demostración. Sea C una componente conexa por caminos X y veamos que C es abierto y cerrado en X . En efecto, C es abierto en X ya que si $x \in C$, entonces x posee un entorno N conexo por caminos y, por tanto, $N \subset C$. Por otro lado, C es cerrado en X ya que $X \setminus C$ es la unión de las restantes componentes conexas por caminos de X y, por tanto, abierto en X . Puesto que X es conexo y C es abierto y cerrado en X se sigue que $C = X$ y, como consecuencia, X es conexo por caminos. $\square$

Corolario 3.7.3. *Sea X un espacio topológico. Si X es localmente conexo por caminos, las componentes conexas de X coinciden con las componentes conexas por caminos.*